Задания третьей дистанционной олимпиады учителей математики Добрянского муниципального района 2017

1) Определите значения параметра p, при каждом из которых уравнение $px^2 + 2(p+1)x^2 + p = 0$ не имеет решений.

2) Имеется два сплава золота и серебра; в одном количество металлов находится в отношении 2:3, а в другом в отношении 3:7. Сколько нужно взять от каждого сплава чтобы получилось 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро было бы в отношении 5:11?

3) Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды SABCDравна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину Sэтой пирамиды и через диагональ ее основания.

4) Написать три первых членах арифметической прогрессии, у которой сколько бы не взять последовательных членов, сумма их всегда равна утроенному квадрату числа этих членов.

5) Равнобедренная трапеция описана около окружности. Под каким углом видна из центра окружности боковая сторона?

6) Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\frac{1+cosx}{2}} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} = 1\ ,$$

удовлетворяющие условию $|x| < 5\pi$.

7) Через точку $M_0(x_0; y_0)$параболы $y = x^2 + 10$проведена к ней касательная. Касательная пересекает параболу $y = x^2 - 1$в точках $M_1(x_1; y_1)$и $M_2(x_2; y_2)$, причем $x_1 < x_2$. Найдите отношение длины отрезка M_1M_2к длине отрезка M_0M_2.

8) Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABCпересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 – середины отрезков MA, MB и MC соотвественно.

   а) Докажите что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$вдвое меньше площади треугольника ABC.
   б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5,\ BC = 8,\ AC = 10$.

9) Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу (4;19).

10) Перед каждым из чисел 10, 11, …, 20 и 2, 3, …, 6 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?